ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. **№ 122.** № 2.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

При настоящемъ двойномъ № 122 — 123 „Вѣстника“ разсылается въ видѣ приложенія новый „Каталогъ книжныхъ магазиновъ Н. Я. Оглоблина“ по отдѣлу Естественныхъ наукъ. Съ требованіями на всѣ вошедшія въ этотъ каталогъ книги можно обращаться или непосредственно въ книжные магазины Н. Я. Оглоблина (въ Кіевѣ и С.-Петербургѣ), или въ Книжный Складъ нашей редакціи.

О ДЛИНѢ. *)

§ 1. Что такое длина опредѣленнаго отрѣзка прямой или кривой линіи?

На этотъ вопросъ нѣтъ отвѣта: длина есть понятіе элементарное.

„Самое понятіе длины, говоритъ *Дюгамель* **), есть одно изъ тѣхъ, которыя не допускаютъ опредѣленія.“

*) Въ замѣткѣ «О длинѣ дуги кривой линіи», помѣщенной въ № 107 «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики», я высказалъ взгляды, значительно разнящіеся отъ развитыхъ здѣсь. Чтеніе и размышленіе убѣдило меня въ ошибочности прежнихъ сужденій. Изложенныя въ настоящей статьѣ соображенія могутъ быть отнесены и къ измѣренію криволинейныхъ поверхностей.

**) *Дюгамель.* Основанія исчисленія безконечно малыхъ.

Формальныя опредѣленія длины однако существуютъ. Такъ, у *Давидова* *) читаемъ: „Отношеніе какой нибудь линіи къ другой, принятой за единицу, мы называемъ длиною этой линіи."

Не входя въ разборъ этого вообще неудовлетворительнаго опредѣленія, замѣтимъ только, что оно сводитъ понятіе о длинѣ измѣряемаго отрѣзка къ понятію о длинѣ отрѣзка, принимаемаго за единицу измѣренія: если говорять, напримѣръ, что AB=6 арш., то это значитъ, что длина AB равна ушестеренной длинѣ той прямой, которая называется аршиномъ.

Ясно поэтому, что въ приведенной цитатѣ нѣтъ дѣйствительнаго опредѣленія длины.

§ 2. Не имѣя въ своемъ распоряженіи опредѣленія длины, математика старается обойтись безъ него.

Цѣли, которыя ставитъ себѣ математика по отношенію къ длинѣ заключаются въ измѣреніи ея, т. е. въ сведеніи даннаго понятія къ простѣйшему,—къ понятію о длинѣ прямой, принимаемой за единицу.

Для измѣренія необходимо установленіе двухъ основныхъ понятій:

а) Понятія о равныхъ и неравныхъ длинахъ.

б) Понятія о сложеніи длинъ.

Разсмотримъ эти вопросы сначала въ примѣненіи къ прямой линіи.

§ 3. Здѣсь мы не встрѣтимъ никакихъ затрудненій, если правильно изберемъ точку отправленія.

Характерное свойство прямой линіи заключается въ томъ, что она совершенно опредѣляется двумя точками.

Изъ этого свойства вытекаетъ возможность наложенія прямыхъ линій.

Возможность наложенія даетъ средства опредѣлить равенство, неравенство и сумму прямолинейныхъ отрѣзковъ. Такимъ образомъ, для прямыхъ линій вопросъ рѣшается просто и ясно.

§ 4. Простота и ясность однако сейчасъ же исчезнутъ, если мы станемъ на точку зрѣнія *Давидова* и многихъ другихъ авторовъ, послѣдователей *Лежандра*.

У *Давидова* курсъ геометріи начинается съ аксіомы: „Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками."

---

*) *Давидовъ*. Элементарная геометрія.

Но, какъ говорить о кратчайшемъ разстояніи, когда еще неизвѣстно, какія разстоянія (длины) считаются не равными?

Когда дѣло идетъ объ отрѣзкахъ прямыхъ, то вопросъ о неравенствѣ рѣшается, какъ мы видѣли, легко, если *предварительно* извѣстно свойство налагаемости.

Опредѣленію *Давидова* свойство налагаемости не предшествуетъ, а слѣдуетъ, поэтому мы здѣсь имѣемъ дѣло съ прямымъ нарушеніемъ научной логики. Если же мы примемъ во вниманіе, что вопросъ идетъ о сравненіи не только прямолинейныхъ отрѣзковъ, а криволинейныхъ между собою и съ прямолинейными, то наше послѣднее заключеніе только усилится.

§ 5. Во время *Прокла* (V вѣкъ) критики *Эвклида*, пронизируя по поводу 20-й *) теоремы его „Началъ", замѣчали, что даже ослы принимаютъ эту теорему безъ доказательства.

Возраженіе это, указывающее на высокую очевидность упомянутой теоремы, не потеряло силы и до настоящаго времени и многіе склонны приписывать ему преувеличенную важность.

Не желая вдаваться въ банальности, мы минуемъ тѣ соображенія, по которымъ не всякая очевидная истина можетъ быть принята за аксіому.

Замѣтимъ только, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ очевидностью такъ называемыхъ наглядныхъ представленій; она, конечно, очень заманчива, но ея недостаточно, — необходимо, чтобы всѣ подчиненныя понятія были ясно и отчетливо обоснованы. Въ данномъ случаѣ это послѣднее требованіе какъ разъ и не исполнено.

§ 6. Перейдемъ теперь къ измѣренію кривыхъ.

Напомнимъ, что за единицу измѣренія мы и здѣсь принимаемъ прямолинейный отрѣзокъ.

Тутъ мы сейчасъ-же наталкиваемся на большое затрудненіе, возникаетъ вопросъ о равенствѣ: какой криволинейный отрѣзокъ считать равнымъ прямолинейному?

Такъ какъ никакая часть кривой не можетъ совмѣститься съ прямой, то методъ наложенія здѣсь невозможенъ, и нужно искать другихъ пріемовъ.

Мы изложимъ нѣсколько попытокъ въ этомъ родѣ.

§ 7. Утверждаютъ, какъ аксіому, что всякую кривую можно выпрямить.

Такое утвержденіе уподобляетъ кривую линію безконечно

---

*) Во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ больше третьей стороны.

тонкой, гибкой и нерастяжимой нити. Оказывается, слѣдовательно, что математическая линія обладаетъ физическими свойствами, что само по себѣ нелѣпо.

Если же отвергаютъ физическія уподобленія, то должны сказать, въ чемъ заключается процессъ выпрямленія.

Этого не говорятъ, и дѣло остается невыясненнымъ, пока не замѣнимъ кривой периметромъ многоугольника съ безконечно большимъ числомъ безконечно малыхъ сторонъ.

Но на такую замѣну мы не имѣемъ никакого права...

§ 8. Говорятъ, что двѣ кривыя линіи (или кривая и прямая) равны, если движущаяся точка пробѣгаетъ ихъ въ равныя времена.

Очевидно, что здѣсь въ обоихъ случаяхъ предполагаются равныя скорости.

Такимъ образомъ, въ объемъ понятій этого опредѣленія входитъ понятіе о времени, о скорости и о равныхъ скоростяхъ.

Но всѣ эти понятія совершенно чужды геометріи, и развитіе ихъ представляетъ затрудненія совершенно неодолимыя *): такъ, напримѣръ, скорость считается понятіемъ элементарнымъ.

§ 9. Пусть кругъ катится безъ скольженія по прямой линіи. Тогда во всякій моментъ движенія разстояніе между начальной точкой касанія и окончательной равно дугѣ окружности, соотвѣтствующей углу поворота круга.

Слѣдовательно, можно выпрямить и какую угодно часть окружности и цѣлую окружность. Это, конечно, вѣрно съ физической точки зрѣнія, но затѣмъ является вопросъ: какъ опредѣлить тотъ родъ движенія, который приписанъ кругу?

Если мы скажемъ, что послѣдовательныя точки окружности совпадаютъ съ послѣдовательными точками прямой, то придется разсматривать линію какъ сумму точекъ, что нелѣпо.

Если же опредѣлимъ движеніе, исходя изъ равенства извѣстныхъ разстояній, отсчитываемыхъ по прямой и по окружности,

---

*) Вотъ какъ выражается по этому поводу *Houel* въ книгѣ «Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire»: Qu'est-ce maintenant que la vitesse? Ou, si l'on renonce à définir la vitesse, en l'admettant au nombre des quantités primitives, qu'est ce que deux vitesses égales? De quelque manière que l'on essaye de répondre à cette question, on se trouvera toujours obligé, tôt ou tard, de passer par les notions de limites et l'on n'aura fait que reculer inutilement la difficulité, en introduisant des auxiliaires inutiles, pour faire une comparaison qu'on aurait aussi bien pu faire directement.»

то впадемъ въ circulus in definiendo: введемъ въ опредѣленіе тотъ терминъ, который желаемъ опредѣлить.

§ 10. Можно было-бы провести и другія попытки въ томъ-же родѣ, но дѣло того не заслуживаетъ—всѣ онѣ оказались тщетными.

Это обстоятельство даетъ намъ право заключить, что прямое установленіе равенства прямолинейнаго и криволинейнаго отрѣзковъ—невозможно.

Если же нельзя установить равенства, то нельзя установить и неравенства, ибо вообще величина A считается больше величины B, если A состоитъ изъ B и еще нѣкоторой добавочной величины C.

Въ крайне спеціальныхъ случаяхъ, когда совмѣщаемыя дуги имѣютъ общее начало, установленіе равенства и неравенства возможно, но это обстоятельство нисколько не измѣняетъ нашего общаго заключенія.

§ 11. *Архимедъ* первый измѣрилъ окружность при помощи принципа, утверждающаго, что изъ двухъ выпуклыхъ линій, проведенныхъ между двумя точками, объемлющая больше объемлемой.

Изъ предыдущаго очевидно, что принципъ этотъ, какъ первоначальный, принятъ быть не можетъ. Когда мы говоримъ: „кривая (при извѣстныхъ условіяхъ) больше прямой (или кривой)", то утвержденіе это лишено всякаго дѣйствительнаго содержанія, ибо терминъ „больше" остается неопредѣленнымъ *).

Именно въ этомъ, а не въ чемъ иномъ заключается слабая сторона Архимедовскаго принципа: упрекъ ставится за неопредѣленность понятій.

Если бы можно было допустить возможность выпрямленія кривой линіи, то аксіома Архимеда, мнѣ кажется, могла бы быть принята.

---

*) Можетъ быть возразятъ, что принципъ Архимеда слѣдуетъ понимать какъ опредѣленіе въ данномъ спеціальномъ случаѣ термина «больше», подобно тому, какъ это дѣлается при переходѣ отъ ариѳметическихъ чиселъ къ алгебраическимъ количествамъ.

Мнѣ кажется, что принять такое толкованіе значитъ, спасаясь отъ дождя, бросаться въ воду.

Прежде всего въ обоихъ указанныхъ случаяхъ нѣтъ пунктовъ сходства: въ одномъ мы имѣемъ дѣло съ величинами, въ другомъ – съ числовыми символами.

По отношенію къ величинамъ терминъ «больше» имѣетъ совершенно ясный и опредѣленный смыслъ и замѣнить его условнымъ нѣтъ ни основаній, ни возможности.

§ 12. Новѣйшіе нѣмецкіе авторы, сознавая указанные недостатки Архимедовскаго принципа, старались развить и исправить его.

Такъ, въ одномъ изъ новыхъ нѣмецкихъ учебниковъ „Die Elementargeometrie des Punctes, der Geraden und der Ebene“ von Dr. Otto *Rausenberger* находимъ приблизительно слѣдующее:

Измѣреніе кривыхъ основывается на такой двойной аксіомѣ:

1) Кривыя можно сравнивать по длинѣ съ прямыми.

2) Безконечно малая дуга кривой болѣе соотвѣтствующей ей хорды и отличается отъ нея на безконечно малую величину высшаго порядка.

По нашему крайнему разумѣнію, эта редакція не вноситъ ничего въ дѣло развитія принципа *Архимеда*. Недостаточно сказать, что кривыя можно сравнивать съ прямыми, а нужно показать, въ чемъ это сравненіе заключается.

Что же касается до пункта 2-го, то вторая часть его вовсе не можетъ быть принята за аксіому,—это настоящая теорема и ее необходимо доказать.

§ 13. Другіе авторы высказываютъ предположеніе, что всѣ кривыя состоятъ изъ безконечно малыхъ, совмѣстимыхъ между собою элементовъ.

По этому представленію прямая характеризуется тѣмъ свойствомъ, что между каждыми двумя ея точками заключается сравнительно наименьшее число элементовъ.

Всѣ эти разсужденія, будучи недостаточно обоснованными, имѣютъ совершенно метафизическій характеръ. Неужели снова вернуться къ схоластикѣ?

§ 14. Истинные принципы измѣренія длины кривыхъ были впервые установлены *Каталаномъ* (Catalan) *) въ 1843 г.

Во главу здѣсь ставится слѣдующее опредѣленіе длины кривой: длина дуги кривой линіи есть предѣлъ, къ которому стремится периметръ ломаной линіи, вписанной въ дугу (или около нея описанной) **), при условіи, что стороны этой ломаной линіи стремятся къ нулю.

Чтобы *оправдать* это опредѣленіе, необходимо доказать, что упомянутый предѣлъ существуетъ и что онъ единственный, т. е. не зависитъ отъ закона вписыванія.

*) См. *M. Mansion*. Méthode des infiment petits.

**) Въ случаѣ плоской кривой.

Это и доказываютъ (къ подробностямъ доказательства обратимся ниже).

Такимъ образомъ, при этой точкѣ зрѣнія, *вопросъ объ измѣреніи кривыхъ прямо сводится къ измѣренію прямолинейныхъ контуровъ* и всѣ затрудненія сразу устраняются.

§ 15. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по поводу опредѣленія *Каталана*.

Прежде всего нужно замѣтить, что новое опредѣленіе формально, т. е. оно не имѣетъ претензіи исчерпать содержаніе понятія, а преслѣдуетъ только спеціальныя цѣли измѣренія.

Этимъ замѣчаніемъ мы устраняемъ возраженіе, будто дано опредѣленіе понятія, которое признавалось нами ранѣе элементарнымъ.

Затѣмъ намъ укажутъ, конечно, на условность или произвольность новаго опредѣленія: спросятъ, какія гарантіи, что оно совпадаетъ съ элементами нашего сознанія о длинѣ кривой.

Мы думаемъ, что вопросъ этотъ выходитъ изъ области математическихъ концепцій, а относится скорѣе къ психологіи, и готовы, если угодно, допустить здѣсь нѣкоторый психологическій постулатъ. Указать преемственную связь между элементами сознанія о длинѣ и формальнымъ опредѣленіемъ длины — очевидно нѣтъ никакой возможности и именно потому, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ элементарными понятіями.

Поэтому, на опредѣленіе *Каталана* слѣдуетъ смотрѣть какъ на первоначальную, исходную истину, какъ на аксіому или постулатъ.

§ 16. Въ педагогическомъ отношеніи новый способъ развитія понятія о длинѣ несомнѣнно представляетъ нѣкоторыя затрудненія.

Геометрическій матеріалъ теряетъ здѣсь свою конкретность и, вслѣдствіе этого, разсужденія пріобрѣтаютъ отвлеченный характеръ.

Подойти къ опредѣленію не легко.

Теорія предѣловъ всегда трудно усвоивается учениками, а тутъ приходится имѣть дѣло съ такими предѣлами, которые, въ нѣкоторомъ смыслѣ, не осязаемы.

Въ виду этого, авторы учебниковъ стремились и стремятся, по возможности, упростить изложеніе. Упрощеніе, между прочимъ, заключается въ томъ, что опускается та часть доказательства, которая относится къ произвольному закону впи-

сыванія: разсматриваютъ только вписываніе по закону удвоенія и доказываютъ, что предѣлъ не зависитъ отъ числа сторонъ начальнаго многоугольника, или ограничиваются случаемъ правильныхъ многоугольниковъ. Въ извѣстномъ классическомъ учебникѣ *Rouché et Comberousse* (Eléments de Géométrie, 1888) всѣ развитія опредѣленія отнесены къ мелкому шрифту, изъ чего, повидимому, можно заключить, что они предназначаются для повторительнаго курса *).

Съ такимъ пріемомъ можно согласиться вполнѣ, если только обставить его приличною откровенностью. Мы не боимся временныхъ пробѣловъ и догматическаго изложенія—мы боимся неясности понятій.

§ 17. Перейдемъ теперь къ развитіямъ опредѣленія (преимущественно съ методической стороны), подраздѣливъ ихъ для удобства на слѣдующія части:

1) Приступъ, имѣющій цѣлью подойти къ опредѣленію.

2) Введеніе коррективовъ къ опредѣленію.

3) Разъясненіе аксіомъ, относящихся къ постоянно убывающимъ и постоянно возрастающимъ величинамъ, если убываніе и возрастаніе ихъ ограничено извѣстными предѣлами. Доказательство теоремы: Предѣлы периметровъ многоугольниковъ вписанныхъ и соотвѣтствующихъ имъ описанныхъ—одинаковы.

4) Доказательство независимости предѣла, при законѣ удвоенія, отъ числа сторонъ первоначальной вписанной линіи.

5) Общее доказательство теоремы о независимости предѣла отъ закона вписыванія.

Считаемъ необходимымъ замѣтить, что пунктъ 4-й вполнѣ заключается въ 5-мъ и, если все обоснованіе опредѣленія длины кривой откладывается до старшихъ классовъ, то параграфъ 4-й можно совершенно выкинуть. Если же время и особенно благопріятныя условія позволятъ, то теорема § 4-го можетъ быть изложена и при первоначальномъ прохожденіи курса—на этотъ случай мы помѣщаемъ ее подъ отдѣльнымъ номеромъ.

---

*) При правильномъ распредѣленіи курса математики теорія предѣловъ должна изучаться въ алгебрѣ и, если она получитъ тамъ надлежащія развитія, то изъ нея непосредственно вытекутъ всѣ тѣ ученія, которыя необходимы геометріи.

Обращаемъ вниманіе читателей на прекрасную обработку статьи о предѣлахъ во 2-мъ изданіи Алгебры Кисслева и въ особенности на теорему 7 стр. 359 этого курса.

§ 18. Найлучшій подходъ къ опредѣленію заключается, по нашему мнѣнію, въ прямомъ выставленіи тѣхъ затрудненій, съ которыми мы сталкиваемся при измѣреніи длины кривыхъ.

Когда затрудненія констатируются, то возбуждается вопросъ: какъ ихъ избѣгнуть?

Безполезно было бы ожидать, что ученики сами сладятъ съ этимъ вопросомъ; тутъ преподаватель долженъ, (не тратя времени на наводящіе вопросы) пойти имъ на встрѣчу.

Онъ чертитъ на доскѣ окружность, вписываетъ въ нее правильный многоугольникъ, затѣмъ удваиваетъ число сторонъ его и ставитъ вопросъ о разности между длиною окружности *) и периметрами этихъ многоугольниковъ. Процессъ этотъ слѣдуетъ повторить нѣсколько разъ, чтобы вызвать болѣе или менѣе яркое *представленіе* о предметѣ.

Когда представленіе сформируется, прямо говоритъ, что периметръ вписаннаго (или описаннаго) многоугольника есть величина перемѣнная и что предѣлъ этой перемѣнной величины называется длиною окружности **).

Этимъ заканчивается первая подготовительная ступень классной работы.

§ 19. Затѣмъ преподаватель стремится намѣтить коррективы къ первоначальному опредѣленію.

Всякая ли перемѣнная величина имѣетъ предѣлъ?

Не всякая. Конкретные примѣры.

Стало быть, надо объяснить, что периметръ вписаннаго многоугольника (или описаннаго), число сторонъ котораго безгранично увеличивается, имѣетъ предѣлъ.

Такъ намѣчается первый коррективъ.

Введеніе второго корректива нѣсколько труднѣе, ибо нелегко подыскать конкретный примѣръ, наглядно иллюстрирующій необходимость доказательства.

Но, во всякомъ случаѣ, здѣсь не представится особыхъ затрудненій и ходъ дѣла рисуется просто: преподаватель чертитъ на доскѣ нѣсколько равныхъ окружностей, вписываетъ въ одну изъ нихъ правильный треугольникъ, въ другую квадратъ и т. д., за-

*) Тѣхъ, кто укажетъ на преждевременность этого выраженія, отсылаемъ къ пункту 15-му.

**) Если имѣется въ виду разсматривать не цѣлую окружность, а дугу ея (что предпочтительнѣе), то придется сдѣлать только нѣкоторыя измѣненія въ выраженіяхъ.

тѣмъ приступаетъ къ увеличенію числа сторонъ многоугольниковъ на первыхъ двухъ чертежахъ по закону удвоенія, а на третьемъ и пр. по какимъ нибудь инымъ законамъ и ставитъ вопросъ: можемъ-ли мы быть увѣрены, что предѣлы периметровъ во всѣхъ случаяхъ одинаковы?

Разсчитываетъ ли преподаватель дать полные отвѣты на поставленные вопросы или не разсчитываетъ, во всякомъ случаѣ, вопросы надо поставить въ полномъ ихъ объемѣ.

§ 20. Теперь переходимъ къ обоснованію перваго корректива.

Но предварительно оговоримся, что мы вовсе не настаиваемъ на детальномъ слѣдованіи нашей примѣрной программѣ, такъ напримѣръ, обоснованіе перваго корректива можетъ слѣдовать непосредственно за тѣмъ, какъ его намѣтили.

Ближайшія обстоятельства дѣла сами укажутъ лучшій и естественный ходъ урока.

Мы возразимъ только противъ такого изложенія, при которомъ будетъ сдѣлана простая ссылка на теорію предѣловъ. Возраженіе мотивируется двумя причинами: во первыхъ, ученикъ долженъ знать, куда и зачѣмъ его ведутъ и, во вторыхъ, разъясненіе всего лучше сдѣлать на томъ конкретномъ примѣрѣ, который составляетъ цѣль изложенія.

Передъ началомъ объясненія преподаватель долженъ сдѣлать очень важную оговорку: мы въ настоящее время не можемъ объяснить, что периметры многоугольниковъ имѣютъ предѣлъ *при всякомъ законѣ увеличенія числа сторонъ,* а установимъ это только въ случаѣ вписыванія по закону удвоенія *).

О причинѣ этой невозможности нѣтъ надобности говорить ученикамъ.

Причина эта заключается въ слѣдующемъ: нельзя утверждать, что при всякомъ законѣ вписыванія периметръ вписанныхъ многоугольниковъ постоянно увеличивается.

Самое обоснованіе заключается въ установленіи и разъясненіи 2-хъ аксіомъ:

1) Если перемѣнная постоянно возрастающая величина X всегда остается меньше постоянной величины A, то X имѣетъ предѣлъ, не превосходящій A.

---

*) Можно было бы расширить законъ, но въ этомъ нѣтъ надобности для даннаго случая.

2) Если перемѣнная постоянно уменьшающаяся величина X всегда остается больше нѣкоторой постоянной величины A, то X имѣетъ предѣлъ, не меньшій A.

Разъясненіе, какъ мы уже замѣтили, надо вести непремѣнно на периметрахъ правильныхъ ломаныхъ линій, вписанныхъ въ дугу или описанныхъ около нея.

Мы разсматриваемъ не цѣлую окружность, а часть ея, чтобы имѣть случай болѣе общій.

Пусть ABCD правильная вписанная ломаная линія *). Для полученія соотвѣтствующей описанной проводимъ въ точкахъ A, B, C, D касательныя къ окружности до ихъ взаимнаго пересѣченія—такимъ образомъ получимъ правильную описанную линію AA'B'C'D **).

Способъ построенія объясняется тѣмъ, что у обѣихъ ломаныхъ линій должны быть общіе концы.

Надо доказать, что:

1) Периметръ всякой вписанной ломаной линіи меньше периметра соотвѣтствующей ей описанной (ссылка на извѣстную теорему).

2) При удвоеніи числа сторонъ вписанной ломаной линіи периметръ ея увеличивается, а периметръ соотвѣтствующей ей описанной уменьшается (доказательство общеизвѣстно).

3) Разность между периметрами описанной и вписанной линіи уменьшается. Это слѣдствіе двухъ предыдущихъ пунктовъ.

4) Эта разность можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины.

Дѣйствительно, при обычныхъ обозначеніяхъ:

$$\frac{P}{p}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{AA'}{AI}=\frac{OA}{OI}$$

(I середина стороны AB, O центръ окружности).

Поэтому:

$$P-p=\frac{OA-OI}{OA.}$$

Но OA — OI есть величина безконечно малая, слѣдовательно и пр.

Послѣ установленія этихъ истинъ разъясненіе аксіомъ не представитъ никакихъ затрудненій.

---

*) Просимъ читателя сдѣлать чертежъ.

**) Названіе «правильная описанная» присвоено линіи AA'B'C'D для краткости.

Мы особенно рекомендуемъ прибѣгнуть при этомъ разъясненіи къ графическому представленію, нанося на прямую линію отъ извѣстной точки длины периметровъ описанныхъ и вписанныхъ линій. Собственно для разъясненія аксіомъ нѣтъ никакой надобности въ пунктахъ 3-мъ и 4-мъ, но сейчасъ указанный нами чертежъ пріобрѣтаетъ большую убѣдительность, если извѣстно свойство, изложенное въ п. 4-мъ.

Съ другой стороны, свойство это рано или поздно придется изложить—поэтому потери во времени не будетъ.

Соотвѣтственнымъ замѣчаніемъ преподаватель всегда сумѣетъ возстановить стройность системы, еслибы было признано, что она нарушена постановкой теоремы 4-й не на свое мѣсто.

Изложеніе могло бы нѣсколько упроститься, еслибы мы разсматривали полные периметры вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, однако упрощеніе было бы ничтожно, а потеря общности значительна.

§ 27. Обоснованіе второго корректива *) не представляетъ ни малѣйшихъ затрудненій.

Пусть p и P означаютъ перемѣнные периметры ломаной линіи вписанной и соотвѣтствующей ей описанной при извѣстномъ числѣ сторонъ начальной ломаной линіи, а p' и P' имѣютъ тѣ же значенія при другомъ числѣ сторонъ первой вписанной линіи.

Доказано, что каждая изъ разностей:

$$P - p$$

и $$P' - p'$$

есть величина безконечно малая.

Слѣдовательно и сумма ихъ:

$$(P - p) + (P' - p')$$

есть также величина безконечно малая.

Сумма эта можетъ быть представлена такъ:

$$(P - p') + (P' - p).$$

Каждый членъ этой суммы положительный и, слѣдовательно, стремится къ нулю: иначе сумма не стремилась бы къ нулю.

Поэтому:

$$\textit{Пр}.(P - p') = 0$$
$$\textit{Пр}.(P' - p) = 0$$

*) Здѣсь опять слѣдуетъ сдѣлать оговорку относительно неполноты доказательства: разсматривается не всякій законъ вписыванія, а только одинъ законъ удвоенія.

Отсюда:

$$Пр.\ P = Пр.\ p'$$
$$Пр.\ P' = Пр\ p$$

Но раньше было указано, что:

$$Пр\ P = Пр.\ p.$$

Слѣдовательно:

$$Пр.\ p = Пр.\ P = Пр.\ p' = Пр.\ P'.\ ^{*})$$

Существуютъ и другіе варіанты этого доказательства. Изложенный сообщенъ намъ г. *Киселевымъ* и представляется наиболѣе простымъ. *М. Попруженко* (Оренбургъ).

(Окончаніе слѣдуетъ.)

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новая теорія росы. Причина образованія росы, согласно объясненію, принятому въ учебникахъ физики, кроется въ сгущеніи паровъ воды, заключающихся въ нижнихъ слояхъ атмосферы — сгущеніи, которое происходитъ подъ вліяніемъ охлажденія, вызваннаго радіаціей земли, т. е. ночнаго лучеиспусканія. Смотря по интенсивности этого послѣдняго, измѣняется и количество росы; для того, чтобы явленіе росы имѣло мѣсто, необходимо, чтобы тѣла, на которыхъ осаждаются капельки росы, имѣли температуру ниже точки росы въ окружающемъ воздухѣ. Въ этомъ, какъ извѣстно, состоитъ теорія *Уэльса*, появившаяся въ 1814 г. въ его сочиненіи „Essay on the aew“ и оставшаяся классической до послѣдняго дня.

Кажется, теорія эта недостаточна, и сгущеніе водяныхъ паровъ атмосферы производитъ лишь слабое количество росы. Г. *Макферсонъ* (Macpherson) указываетъ въ „Longueau's Magazine“ на многочисленные источники, способствующіе появленію росы.

Наиболѣе обильнымъ источникомъ является эксудація (потѣніе) значительнаго числа растеній, покрывающихся влагою. Гуляя утромъ по огороду, не трудно замѣтить на капустѣ большія свѣтлыя и блестящія капли, въ которыхъ переливаются сол-

---

*) Переходъ къ этимъ равенствамъ отъ предыдущихъ (даже для лицъ незнакомыхъ съ теоремами теоріи предѣловъ) такъ простъ, что мы на немъ не останавливаемся,—при всемъ томъ ниже читатель найдетъ болѣе детальныя разъясненія, сюда относящіяся.

нечные лучи; точно такъ же, проходя по полю, засѣянному свекловицей, можно замѣтить на листьяхъ тѣ же блестящія капли. Всякій скажетъ, что это капли росы, и всякій ошибется, что и доказалъ Джонъ Айткенъ (John Aitken). На самомъ дѣлѣ, эти капли являются слѣдствіемъ потѣнія растенія. Для того, чтобы констатировать разницу, существующую между этими каплями и каплями настоящей росы, достаточно бросить взглядъ на сухой листъ или вообще на какой нибудь безжизненный предметъ, находящійся по сосѣдству съ зеленымъ листомъ, покрытымъ каплями. На поверхности перваго легко будетъ замѣтить совершенно своеобразный и характеристическій осадокъ сырости, нѣкоторое подобіе облачка; это—настоящая роса.

Айткенъ бралъ пучекъ дерна, помѣщалъ его подъ стеклянный колпакъ и выжидалъ конца появленія капелекъ. Выбравъ затѣмъ былинку съ капелькой, онъ тщательно вытиралъ ее и заключалъ въ стеклянный шарикъ, который герметически закрывался и изолировался отъ сырости воздуха. Послѣ нѣсколькихъ минутъ можно было замѣтить на концѣ изолированной такимъ образомъ былинки образованіе капельки: неопровержимое доказательство того, что эта послѣдняя есть результатъ потѣнія.

Впослѣдствіи Айткенъ замѣтилъ, что эти эксудаціи имѣютъ мѣсто не только во время ночей, когда выпадаетъ роса. Послѣ дождя, если нѣтъ вѣтра, и если слои воздуха, сосѣдніе съ землей, насыщены, многія травяныя былинки покрывается капельками въ томъ самомъ мѣстѣ, гдѣ обыкновенно появляются капельки отъ потѣнія и гдѣ не можетъ находиться дождевая капля.

Далѣе, путемъ тщательныхъ взвѣшиваній, наблюдателю удалось убѣдиться, что комъ земли, на поверхности которой появилась роса, *потерялъ въ своемъ вѣсѣ* сравнительно съ вѣсомъ, который онъ имѣлъ наканунѣ, что служитъ доказательствомъ того, что онъ испарилъ пары воды и способствовалъ образованію элементовъ осадка сырости, которымъ покрылись близлежащіе предметы.

Изъ этихъ различныхъ опытовъ вытекаетъ, что радіація земли не является исключительной причиной, обусловливающей появленіе росы, а что эксудація почвы, равно какъ и самыхъ растеній, играетъ чрезвычайно важную роль въ образованіи водяныхъ капелекъ, называемыхъ общимъ именемъ росы.

О. Пергаментъ.

Объ упругости пара водноспиртовыхъ растворовъ солей (Ив. Каблуковъ. Ж. Ф. Х. О. XXIII. 6. 388). Упругость пара раство-

ровъ можетъ служить мѣриломъ величины сродства между растворителемъ и растворенным тѣломъ. Упругость пара водныхъ растворовъ солей меньше упругости пара чистой воды при той же температурѣ и давленіи вслѣдствіе притяженія, сродства между растворенным тѣломъ и растворителемъ. Авторъ нашелъ, что при растворепіи солей въ смѣси спирта съ водой можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ произойти увеличеніе упругости пара раствора. Такъ, для раствора 117 граммовъ NaCl въ 1 литрѣ смѣси изъ 17% по вѣсу спирта и 83% воды была найдена упругость пара при 18° въ 24,31 миллим., тогда какъ упругость пара смѣси 17% спирта и 83% воды равна при тѣхъ же условіяхъ 20,87 миллим. Это явленіе объясняется, если допустить, что частицы спирта и воды, находящихся въ смѣси, соединяются въ сложныя группы (гидраты спирта), вслѣдствіе чего упругость пара воднаго спирта меньше суммы упругостей паровъ воды и спирта. При растворепіи въ такой смѣси соли, частицы соли, вслѣдствіе притяженія къ частицамъ воды, соединяются съ ними, вытѣсняя спиртовыя частицы изъ гидратовъ спирта. Если опытъ производится подъ колоколомъ, откуда выкачанъ воздухъ, то при растворепіи соли въ водномъ спиртѣ число водяныхъ частицъ въ атмосферѣ подъ колоколомъ уменьшится на a, а число частицъ спирта увеличится на a'. Общее-же увеличеніе числа частицъ (спирта и воды) въ атмосферѣ подъ колоколомъ, а слѣдовательно и упругости пара, выразится черезъ $a' - a$. Съ измѣненіемъ количества растворенной соли измѣняется и a' и a, и при различныхъ концентраціяхъ растворовъ можетъ быть $a' < a$, $a' = a$ и $a' > a$. Въ первомъ случаѣ раствореніе соли въ водномъ спиртѣ вызоветъ уменьшеніе упругости пара, во второмъ упругость пара остается безъ измѣненія, въ третьемъ она увеличивается. Авторъ намѣренъ заняться болѣе подробной разработкой этого вопроса. *В. Г.*

Электрическія явленія при полученіи твердой углекислоты (Georg. Hausskneclt. Berl. Ber. 24. 1031). Для полученія твердой углекислоты на выпускной кранъ резервуара съ жидкой углекислотой надѣвается холщевой мѣшокъ, гдѣ и образуется твердая углекислота вслѣдствіе поглощенія тепла при испареніи жидкой. При этомъ въ темнотѣ замѣчается внутри мѣшка блѣдный зеленовато-фіолетовый свѣтъ, изъ подъ холста выскакиваютъ искры въ 10—20 мм., а при приближеніи къ мѣшку руки замѣчается то же ощущеніе, что и при прикосновеніи къ заряженному кондуктору электрической машины. Опытъ удается только съ чистой углекисло-

той, не содержащей воздуха, и свѣтъ появляется послѣ образованія комка твердой углекислоты внутри мѣшка. Причина явленія вѣроятно та же, что и при возбужденіи электричества въ паровой машинѣ Армстронга. *(Ж. Ф. Х. О.) В. Г.*

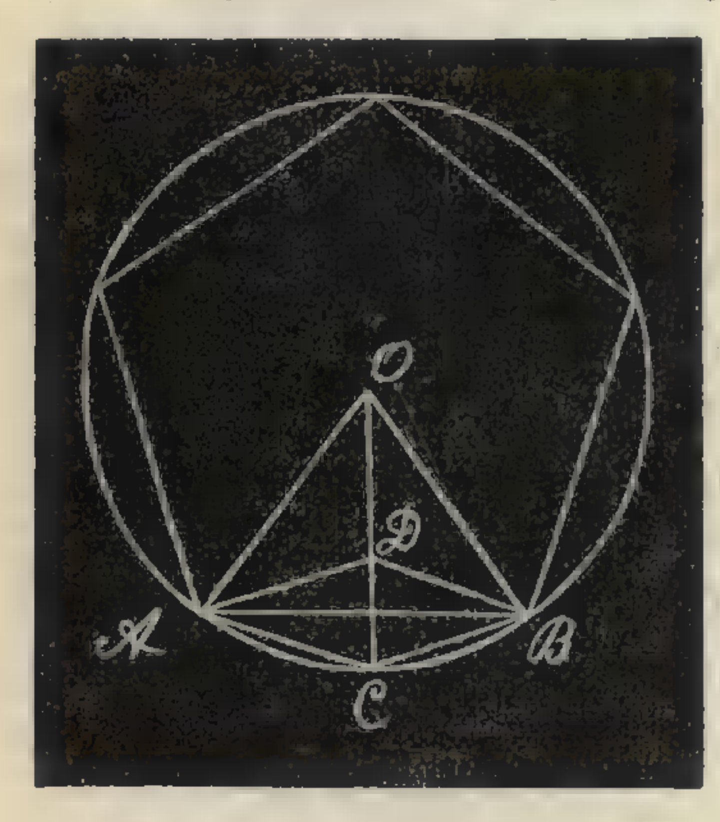
Фотоэлектрическіе опыты (Minchin. Philos. Mag. 1891. № 190, p. 207). Помѣщая въ ту или другую жидкость двѣ по возможности тождественныя металлическія пластинки (серебряныя, мѣдныя и др.), голыя или покрытыя хлористыми или другими солями того-же металла, изъ котораго сдѣланы пластинки, и заставляя на *одну* изъ этихъ пластинокъ падать свѣтъ, авторъ обнаруживалъ (вольтметромъ или электрометромъ) разность потенціаловъ на обѣихъ пластинкахъ. *(Ж. Ф. Х. О.) В. Г.*

Основная ошибка общеупотребительныхъ экссиккаторовъ (W. Hempel. Berl. Ber. 23. 3566) заключается въ томъ, что высушиваемое вещество помѣщается выше осушающаго. Опытъ показываетъ, что при обратномъ расположеніи высушиваніе происходитъ втрое быстрѣе. Это объясняется тѣмъ, что влажный воздухъ легче сухого. Искусственное охлажденіе верхней части экссикатора можетъ еще въ значительной степени ускорить процессъ высушиванія.

(Ж. Ф. Х. О.) В. Г.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Опредѣленіе стороны правильнаго вписаннаго пятиугольника.



Фиг. 2.

Полагая радіусъ круга OC $= r$, сторону прав. вписан. пятиугольника AB$=x$ (фиг. 2) и сторону десятиугольника AC$=a$, проводимъ биссекторъ AD угла OAC. Соединивъ B съ D, получимъ ромбъ ADBC (ибо AD $=$ AC), сторона котораго есть a, а діагонали x и $r-a$. На основаніи свойствъ ромба имѣемъ:

$$4a^2 = x^2 + (r-a)^2$$

т. е. $x^2 = 3a^2 - r^2 + 2ar$.

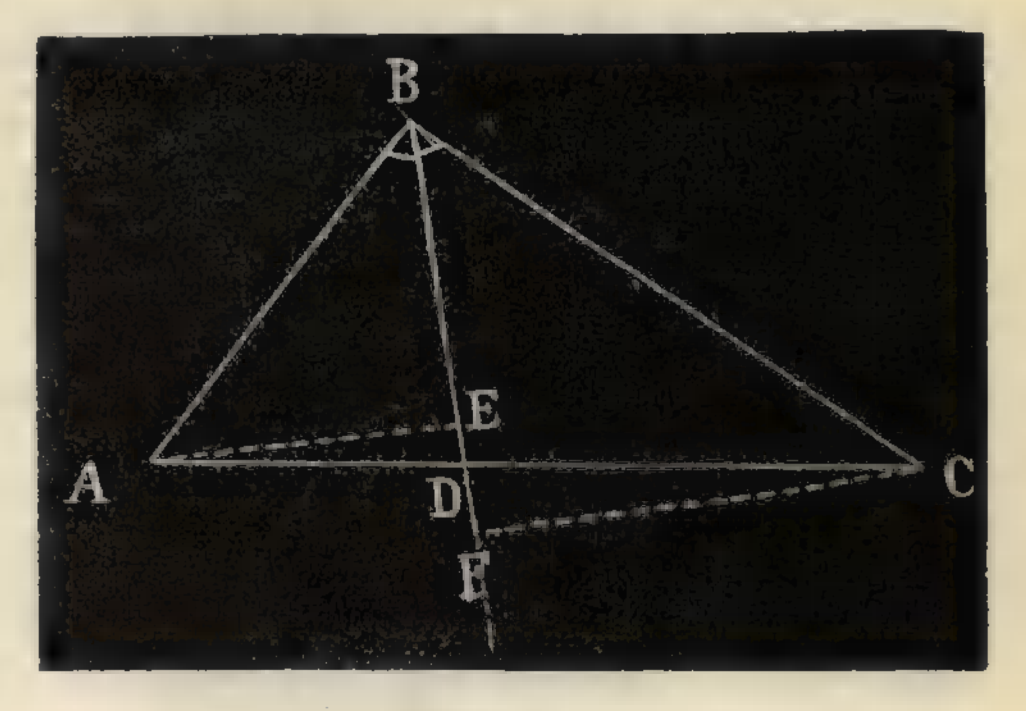
Но, какъ извѣстно, $\frac{r}{a} = \frac{a}{r-a}$

или $ar = r^2 - a^2$;

вслѣдствіе чего предыдущее уравненіе даетъ зависимость:

$x^2 = r^2 + a^2$. *К-ъ* (Студ. Спб. ун.)

Доказательство основного свойства биссектора угла въ треугольникѣ.



Фиг. 3.

Опустивъ на биссекторъ BD перпендикуляры AE и CF, (фиг. 3) имѣемъ изъ подобія треугольниковъ AED и CDF

AD : DC = AE : FC

и изъ подобія треугольниковъ AEB и CFB

AB : BC = AE : FC.

Изъ сравненія полученныхъ пропорцій имѣемъ:

AD : DC = AB : BC,

т. е. что биссекторъ угла въ треугольникѣ дѣлитъ противолежащую сторону на отрѣзки пропорціональные прилежащимъ сторонамъ.

При этомъ доказательствѣ чертежъ не требуетъ столько мѣста, какъ при общепринятомъ.

Такой-же пріемъ примѣнимъ и къ доказательству обратной теоремы. *В. Тютинъ* (Учен. Уфимской гимн.)

Къ механическому дѣленію угла на три равныя части.

Для рѣшенія задачи о трисекціи угла, невозможной „геометрически", т. е. при употребленіи лишь циркуля и линейки, существуетъ однако много чертежныхъ, или такъ называемыхъ „механическихъ" пріемовъ. Одинъ изъ нихъ, очень древній, принадлежитъ Менехму *) и состоитъ въ слѣдующемъ.



Фиг. 4.

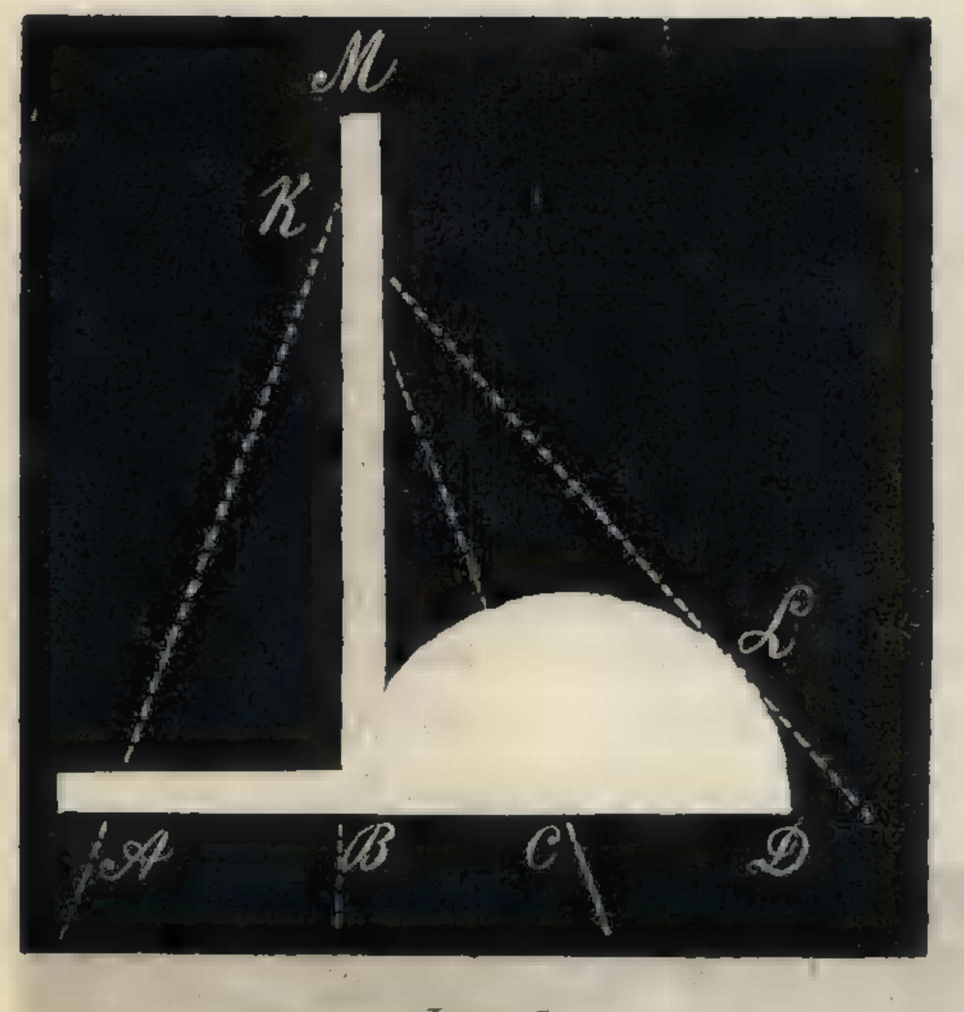
Около вершины даннаго (остраго) угла ABC (фиг. 4) произвольнымъ радіусомъ описывается полукругъ и, продолживъ сторону CB при помощи линейки, стараются провесть сѣкущую DEA такъ, чтобы внѣшній ея отрѣзокъ DE былъ равенъ радіусу EB. Достигается это перемѣщеніемъ линейки, на которой отложена длина радіуса. Вслѣдствіе

---

*) Менехмъ (род. около 375 г. до Р. Х.), ученикъ Платона, одинъ изъ знаменитѣйшихъ геометровъ древней Греціи. Ему приписывается открытіе

равенства сторонъ AB=BE=DE, треугольники ABE и BED равнобедренны, а отсюда легко видѣть, что уголъ ADB равенъ $^1/_3$ даннаго угла ABC, т. е. что проведя черезъ B прямую, параллельную DA, найдемъ искомую третью часть даннаго угла. *) Чтобы примѣнить этотъ пріемъ къ трисекціи тупого угла, надо или раздѣлить его предварительно пополамъ и затѣмъ найти $^2/_3$ этой половины, или же отнять отъ него прямой уголъ, трисекція котораго геометрически возможна, и къ $^1/_3$ остатка прибавить $^1/_3$ прямого угла.

Вотъ еще одинъ изъ такихъ пріемовъ, быть можетъ, менѣе извѣстный читателямъ „Вѣстника". Изъ картона, дерева или металла приготовляется плоская фигура ABCDLM (фиг. 5), состоящая изъ наугольника и полукруга, радіусъ котораго CD откладывается отъ точки B до A. Въ точкахъ A, B и C дѣлаются постоянныя мѣтки. Для раздѣленія произвольнаго даннаго угла AKL на три части, приборчикъ накладывается на него такъ, чтобы вершина угла K лежала на краю линейки MB, одна изъ сторонъ проходила черезъ точку A, а вторая—касалась полукруга гдѣ нибудь въ точкѣ L. Тогда, очевидно, прямоугольные треугольники AKB KBC и CKL равны между со-



Фиг. 5.

коническихъ сѣченій. Знаменитую «Делійскую» задачу (объ удвоеніи куба), сведенную Гиппократомъ Хіосскимъ къ построенію двухъ среднихъ пропорціональныхъ, онъ рѣшилъ построеніемъ двухъ пересѣкающихся параболъ, или одной параболы и одной гиперболы. Родной братъ его, Диностратъ, извѣстенъ приложеніемъ такъ называемой «квадратрисы», кривой, изобрѣтенной Гиппіемъ для рѣшенія задачи о трисекціи угла, къ рѣшенію третьей исторической задачи — квадратуры круга. (См. подробнѣе объ этомъ въ исторіи геометріи.)

Прим ред.

*) На этомъ основано устройство **линейки Матте**. Послѣдняя состоитъ изъ трехъ равныхъ частей: Q2, 2B и BA, вращающихся на шарнирахъ. (Фиг. 6),

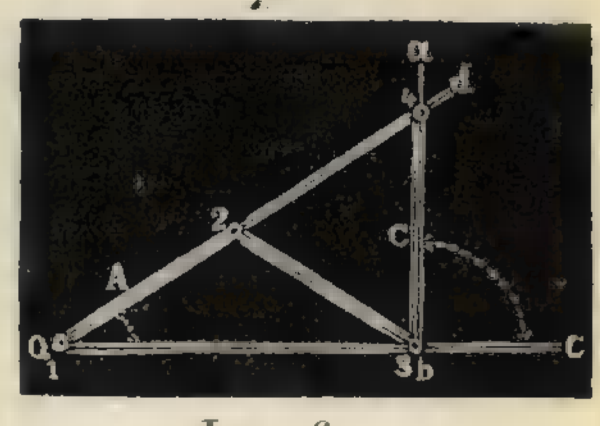
бою, и уголъ AKL прямыми KB и KC раздѣлится на три равныя части *).

С. Г. Н-ко. (Одесса).

Положимъ требуется раздѣлить на 3 части уголъ *abc*.

Колѣно *ba* прикладываютъ къ линіи *ba* и придерживаютъ рукою, а къ колѣну Q2 прикладываютъ обыкновенную линейку A и вращаютъ до тѣхъ поръ, пока точка Q не совпадетъ съ продолженіемъ стороны *cb*. Уголъ $dQc = \frac{1}{3} abc$.

Прим. ред.



Фиг. 6.

*) Приводимъ еще описаніе нѣсколькихъ подобныхъ приборовъ, заимств. изъ книги *В. Г. Фонъ-Бооля*: «Инструменты и приборы для геометрическаго черченія, съ изложеніемъ ихъ теоріи», выходящей теперь въ видѣ приложенія къ «Запискамъ Моск. Отд. Имп. Р. Техническаго Общества» (см. вып. 3—6 за 1891 годъ.)

Приборъ Варренъ-Гольдена (Фиг. 7), состоитъ изъ двухъ циркулей GOJ и HOK, соединенныхъ такъ, что вторая ножка дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый первой и третьей, а третья — уголъ образуемый второй и четвертой. Вслѣдствіе этого уголъ между первой и четвертой ножками дѣлится на три равныя части.

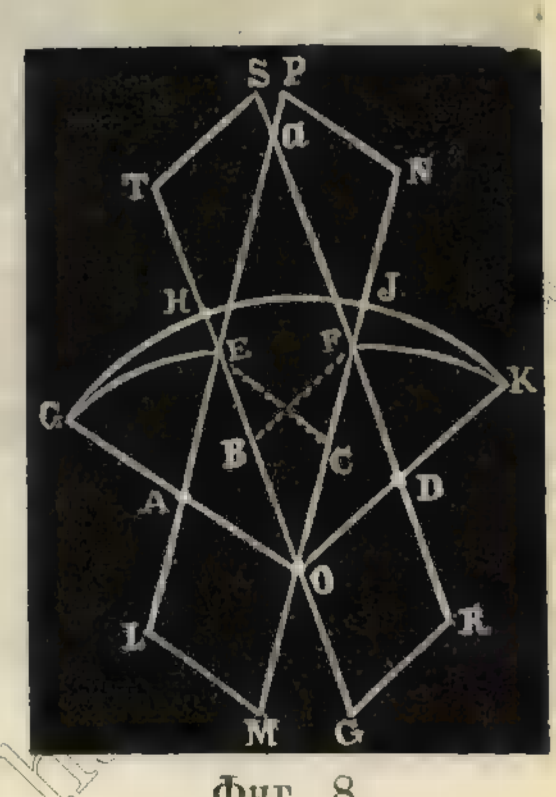
Для раздѣленія даннаго угла на три равныя части, совмѣщаютъ ножки GO и KO со сторонами даннаго угла, отмѣчаютъ концы среднихъ ножекъ и соединяютъ точки H и J съ O.



Фиг. 7.


Параллельныя линейки. Положимъ, надо раздѣлить на три равныя части уголъ GOK (Фиг. 8).

Отложимъ на сторонахъ угла AO=OD и изъ точекъ A и D радіусомъ AO описываемъ дуги GE и KF. Воткнемъ булавки въ точкахъ O, A и D. Приложимъ края двухъ параллельныхъ линеекъ къ булавкамъ такъ, чтобы края линейки LMNP касались булавокъ A и O, а края линейки QRST —булавокъ O и D. Затѣмъ поворачиваемъ обѣ линейки, пока края LP и QT не пересѣкутся между собою въ какой нибудь точкѣ, лежащей на дугѣ GE, а края MN и RS—на дугѣ KF. Проведемъ прямыя по краямъ QT и MN, онѣ и раздѣлятъ данный уголъ на три равныя части, что становится очевиднымъ, если дополнимъ ромбы OAEC и OBFD.



Фиг. 8.

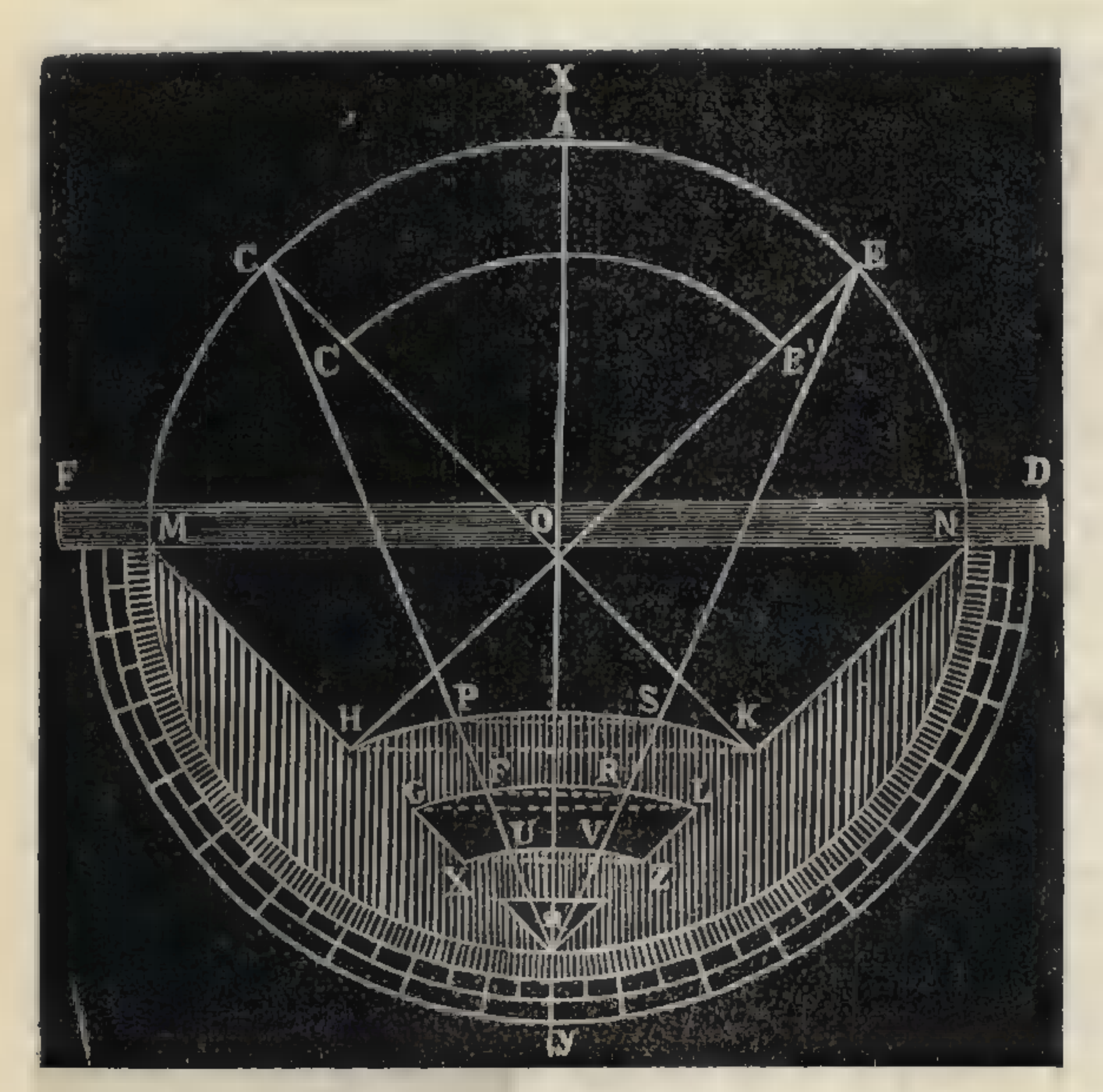
ЗАДАЧИ.

№ 229. Въ „Руководствѣ Физики“ А. Малинина и К. Буренина предложена и рѣшена неправильно слѣдующая задача (§ 423, № 38 изд. 8-е):

„Въ стеклянномъ сосудѣ налито 120 гр. ртути; въ ртути плаваетъ кусокъ желѣза въ 100 гр.; общая температура 0°; сосудъ совершенно наполненъ ртутью. Сколько вытечетъ ртути, если нагрѣть сосудъ до 100°? Плотность желѣза при 0° = 7,78; плотность ртути при 0° = 13,59; коэффиціенты кубическаго расширенія: желѣза — $\frac{1}{28200}$; стекла — $\frac{1}{38700}$.“ Отвѣтъ: $x=1,9$ гр.

Требуется задачу эту изслѣдовать и исправить.

С. Ржаницынъ (Троицкъ).



Фиг. 9.

Полисекторъ Маттона (Фиг. 9) состоитъ изъ транспортира и соединенныхъ съ нимъ линеекъ, края которыхъ HK, GL и XZ имѣютъ свойство механически дѣлить данный уголъ соотвѣтственно на 3, 5 и 7 равныхъ частей.

Приборомъ этимъ, на теоріи котораго мы здѣсь останавливаться не будемъ, пользуются такъ: данъ, положимъ, уголъ C'OE'. Изъ вершины радіусомъ = OM, описываемъ окружность, продолжаемъ стороны угла до пересѣченія съ нею въ точкахъ C и E, дѣлимъ данный уголъ пополамъ прямою AB, проводимъ перпендикулярный къ этой послѣдней діаметръ MN и строимъ вписанный уголъ CBE. Теперь остается наложить полисекторъ такъ, какъ показано на чертежѣ и отмѣтить точки пересѣченія прямыхъ CB и EB съ кривыми краями HK, или GL или XZ. Хорда PS = хордѣ $^1/_3$CE, и точно также FR дастъ хорду $^1/_5$CE и UV—хорду $^1/_7$CE.

Прим. ред.

№ 230. Найти число, которое при дѣленіи на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 даетъ соотвѣтственно остатки 1, 2, 3, 4 и 5.

Найти ариѳметически наименьшее изъ такихъ чиселъ.

Бланковъ (Мюнхенъ).

№ 231. Черезъ средину D основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC проведена прямая, пересѣкающая одну изъ равныхъ сторонъ AC въ точкѣ N, и продолженіе другой, AB — въ точкѣ M. По даннымъ отрѣзкамъ BM $= a$ и CN $= b$ требуется опредѣлить длину равныхъ сторонъ $x =$ AB $=$ AC.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 232. Для измѣренія высоты двухъ вертикальныхъ столбовъ AB и CD (напр. телеграфныхъ), измѣренъ нѣкоторый базисъ EF $= h$, выбранный такъ, что прямая BD, соединяющая основанія столбовъ, видна изъ E подъ извѣстнымъ угломъ BED $= \varphi$. Изъ концовъ базиса E и F высоты столбовъ представляются подъ извѣстными углами зрѣнія α и β, γ и δ. Опредѣлить безъ помощи тригонометріи (построеніемъ) BD и AB, если отношеніе высотъ столбовъ $\frac{AB}{CD} = m$ извѣстно.

Н. Александровъ (Тамбовъ).

№ 233. Опредѣлить сумму n членовъ

$$\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b + \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c + \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} d + \ldots\ldots + \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} v$$

при условіи, что a, b, c, d, ….. u, v образуютъ ариѳметическую прогрессію.

Н. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 234. Черезъ точку O проведены четыре окружности такъ, что точки пересѣченія 1-ой и 2-ой, 2-ой и 3-ей, 3-ей и 4-ой и 4-ой и 1-ой расположены на одной прямой. Показать, что произведеніе діаметровъ первой и третьей окружностей равно произведенію діаметровъ второй и четвертой.

Н. Свѣшниковъ (Троицкъ).

ПОПРАВКА.

Въ предыдущемъ № 121 „Вѣстника“, въ отдѣлѣ „Рѣшенія задачъ“ (стр. 24) вкралась грубая ошибка: вмѣсто *правильнаго* рѣшенія задачи № 150 (1 сер.) помѣщено *неправильное*. Ошибочность даннаго тамъ разъясненія парадокса, приведшаго къ выраженію

$$2\log(-1) = 0$$

изъ тождества $(-1) = 1 : (-1)$, очевидна уже изъ того, что теорема „если произведеніе равно нулю, то и одинъ изъ множителей долженъ быть равенъ нулю" примѣнима не только къ дѣйствительнымъ, но и къ мнимымъ выраженіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = 0$$

или $$ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1} = 0,$$

то необходимо: $$ac-bd = 0 \text{ и } ad+bc = 0;$$

отсюда, исключая послѣдовательно a и b находимъ

$$b(c^2+d^2) = 0 \text{ и } a(c^2+d^2) = 0,$$

что возможно или: при $c^2+d^2 = 0$, т. е. при $c = d = 0$,

или при $a = b = 0$.

Слѣдовательно либо $a+b\sqrt{-1} = 0$, либо $c+d\sqrt{-1} = 0$.

Для разъясненія парадокса, предложеннаго въ задачѣ № 150, необходимо вникнуть въ истинный смыслъ равенства вида

$$\log(\alpha\beta) = \log\alpha + \log\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ примѣненіи его къ мнимымъ числамъ. Каждый логариѳмъ числа вида $a+b\sqrt{-1}$ имѣетъ безчисленное множество значеній, и потому равенство (1) надо понимать такъ: если значенія двухъ изъ логариѳмовъ, въ него входящихъ, будутъ взяты произвольно изъ среды всѣхъ возможныхъ значеній ихъ, то всегда найдется такое значеніе третьяго логариѳма, при которомъ равенство (1) будетъ удовлетворено *). Слѣдовательно, выбирая произвольныя значенія для всѣхъ трехъ логариѳмовъ, мы рискуемъ изъ равенства (1) прійти къ нелѣпости, что и случилось въ разсматриваемомъ примѣрѣ при переходѣ отъ равенства

$$\log(-1)+\log(-1) = \log 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

къ равенству ошибочному

$$2\log(-1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Всѣ значенія $\log 1$ можно представить въ видѣ $2k\pi\sqrt{-1}$, а значенія $\log(-1)$ въ видѣ $(2m+1)\pi\sqrt{-1}$, гдѣ k и m произвольныя цѣлыя числа. Но, на основаніи вышесказаннаго, значенія перваго и второго члена лѣвой части равенства (2) вообще различны, т. е. если это равенство представить въ видѣ

$$(2m+1)\pi\sqrt{-1} + (2m'+1)\pi\sqrt{-1} = 2k\pi\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad (2')$$

то числа m и m' надо принимать вообще какъ различныя. Послѣ сокращеній, изъ (2') находимъ зависимость

*) См. напримѣръ «Handbuch der algebr. Analysis» von Schlömilch. 5-te Aufl. 1873. s. 215.

$$m + m' + 1 = k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

которая и показываетъ наглядно, что изъ трехъ чиселъ: m, m' и k только двумъ можно придать произвольныя значенія. Въ данномъ случаѣ значенія $\log(-1)$ въ обоихъ членахъ лѣвой части равенства (2) приняты произвольно тождественными, т. е. положено $m = m'$; тогда изъ (4) имѣемъ

$$2m + 1 = k,$$

откуда видимъ, что при такомъ условіи k *уже не можетъ имѣть значенія* $= 0$ (ибо m, какъ число цѣлое, не можетъ $= -{}^1/_2$).

Слѣдовательно, исходя изъ равенства (2), мы имѣемъ право принимать, что

$$2\log(-1) = \log 1,$$

но отсюда перейти къ равенству $2\log(-1) = 0$ не имѣемъ права, ибо $\log 1$ въ этомъ случаѣ не равенъ нулю.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 117 (2 сер.) Въ сборникѣ ариѳметичнскихъ задачъ Евтушевскаго (2 ч. № 798) находимъ слѣдующую задачу:

„Извозчика наняли перевезти 100 зеркалъ съ условіемъ: за доставку на мѣсто каждаго зеркала въ цѣлости заплатить 2,365 руб., а за каждое разбитое зеркало вычесть съ него 25,4 руб.; при перевозкѣ извозчикъ разбилъ нѣсколько зеркалъ и при разсчетѣ получилъ только 134,9 руб. Сколько зеркалъ было разбито при перевозкѣ?“

Въ отвѣтѣ сказано 4. Вѣренъ ли отвѣтъ? какъ надо истолковать или измѣнить задачу, чтобы этотъ отвѣтъ былъ вѣренъ?

Рѣшая задачу, легко убѣдиться, что въ ея условіи есть ошибка, ибо въ отвѣтѣ получается 3 съ дробью. Чтобы исправить эту ошибку, достаточно выбросить изъ задачи слова: *въ цѣлости;* тогда отвѣтъ 4 будетъ вѣренъ.

В Россовская, В. Кишкинъ, С. Разумовскій, П. Пузановъ, П. Писаревъ (изъ Курска), *Г. Ширинкинъ, А Коганъ, П. Вонсикъ, А. Семеновъ* (изъ Воронежа), *А. Шульженко, П. Бискъ* (Кіевъ), *К. К...ли* (Кам.-Под.), *Ю. Новицкій* (Винница), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ), *В. Шидловскій* (Полоцкъ), *А. Витковскій* (Вел.-Луки).

№ 179 (2 сер.) Показать, что треугольникъ, двумя сторонами котораго служатъ отрѣзки нѣкоторой прямой, раздѣленной въ

въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, а третьей—средняя пропорціональная между этими отрѣзками—есть прямоугольный.

Если одна изъ сторонъ

$$a = \frac{n}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

то вторая будетъ: $b = \frac{n}{2}(3 - \sqrt{5})$

и третья: $c = n\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Возвышая эти выраженія въ квадратъ, легко убѣдиться, что

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т. е. что a есть гипотенуза.

В. Россовская, К. Щиголевъ (Курскъ), *А. Байковъ* (Москва), *Н. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *А. П.* (Пенза), *Н. Бѣлянкинъ* (Кіевъ).

Загадка № 26. Три виноторговца пріобрѣли на общія деньги 7 полныхъ бочекъ вина, 7—наполненныхъ до половины и 7—пустыхъ, и по условію, какъ вино такъ и бочки раздѣлили между собою поровну. Сколько получилъ каждый, если никакой переливки при этомъ дѣлежѣ не было?

Каждый виноторговецъ долженъ въ 7 бочкахъ получить $3\frac{1}{2}$ бочекъ вина, что достигается тремя способами. Напримѣръ первый изъ нихъ беретъ: 3 полн. б., 3 пустыя и 1 наполн. до половины, или 2 полн., 2 пуст. и 3 нап. до полов., или, наконецъ, 1 полн., 1 пуст. и 5 наполн. до полов. Соотвѣтственно этому дѣлятся остаткомъ второй и третій.

Н. Живоглядова, Е. Гешвендъ, А. Яницкій, М. Баронъ Корфъ 1-й, М-ко, Л. Антс, В. Моргунъ, А. Шульженко (Кіевъ), *П. К., П. Волковъ* (Спб.), *К. Цысаренко, А. Протопоповъ* (Курскъ), *І. Теплицкій*, (Кременч.), *С. Зубковъ* (Полт.), *С. Ржаницынъ* (Троицкъ), *Н. Евсѣевъ* (Тем.-ханъ-Шура), *Ф. Ивашкевичъ* (?).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою Одесса, 2 Октября 1891 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа, Тираспольская, № 14.